都市研究報告76, *1976*

# 首都圏経済の地域連関分析

桐谷　維

目　次



## I　首都圏経済の地域連関分析の構想

本研究の主眼は，首都圏とそれ以外の各地域との間の経済的相互依存の現状をモデル化して，首都圏経済に関する将来の経済的・環境的・厚生的政策に資するための理論的枠組みとその定量的方法論の可能性を把握することにある。首都圏経済の将来にわたる経済的社会的活動は，他地域との相互関連の上で成立する一定の構造に立脚して進展すると思われるが，これに伴なう種々の政策立案の根底には，将来の首都圏経済がどのような経済活動を営んで行くのかについての定量的把握が不可欠である。本文で試みられる経済理論の展開は，主として，首都圏経済（あるいはその他地域経済）の活動水準を測る最も基本的な指標として，その粗生産ベクトルを定量的に把握し，同時に，所定のモデル的ビジョンに対応しての首都圏とそれに関連する地域連関表の統計的推定方式を提出する。

本文に解説するモデルは，経済学において産業連関論として知られる理論的アイディアを母胎に，地域連関論として派生した内容を結合した形で，最初はかなり包括的に一般形を示す。この段階のモデルは，各地域間の各産業別の投入・産出的関係がともに明示的に組み入れられており，任意の地域分類・任意の産業（財）分類が可能なように設けられているため，最も一般的である。後に，このモデルは最も単純な二地域間モデルとしての縮約形で具体化されるが，われわれはこれの両極端において，可能な段階の分類基準を採ればよい。

このように分類の基準を極めて屈伸的に取扱わねばならぬ態度には，現実にこの種の分析を実施する上で大きな統計的障害のあることが含意されている。それは，この種の分析を可能とする統計資料が，現状ではまだほとんど不備であって，最も単純な首都圏非首都圏の二地域分類のモデルさえも，その所要の信憑性ある統計はほとんど入手不能である。それ故，この研究は，一面で，冒頭に掲げたモデル分析を行なうためには，どのような統計資料を捕捉し，整備しなければならないかを,むしろ,解明する意味すら持つといえる。このような統計的現状において，本研究で提出するモデルは，その最も単純な形式においてすら，統計的推論のプロセスに乗せることができない。従って，本研究は，いずれ，これが可能となる時機に備えて，地域連関分析のマニュアルを用意するという意味合いで当面は，我慢しなければならない。

しかしながら，この研究の一端を補助的に構成するものとして，現状で可能な段階の最終需要部分の定量的モデル分析は，別途，発表してあるので，本研究と併わせて参照されたい。[註1)]

## II　地域・産業連関の一般的モデル

首都圏および非首都圏の地域経済体系と産業連関体系を結合して明示的に定式化するために，日本経済の体系を首都圏とそれ以外の多数地域に分割し，同時に，各産業は製品特化の仮定の下で，関連する財の種類に分類される。

地域を添字 i で表わし，特に首都圏を i＝1，非首都圏の各地域を i＝2，…，n で表わす。他方，関連する各財を添字 j＝1，2，…，l で表わす。海外セクターを当然，考慮に入れるが，これは暗意的に取扱い，特に添字を規定しない。

まず，首都圏と非首都圏各地域における各財の生産関数 $f^{ij}$ をベクトル表示で次のように定義する。

$$
\mathbf{X}_1=\begin{pmatrix} f^{11}\ (K_1,\ L_1,\ S_1,\ \mathbf{Z}_1,\ \cdots,\ \mathbf{Z}n) \\ \vdots \\ f^{11}\ (K_1,\ L_1,\ S_1,\ \mathbf{Z}_1,\ \cdots,\ \mathbf{Z}n) \end{pmatrix}
$$
$$
\vdots \qquad\qquad \vdots \tag{1}
$$
$$
\mathbf{X}n=\begin{pmatrix} f^{n1}\ (Kn,\ Ln,\ Sn,\ \mathbf{Z}_1,\cdots,\mathbf{Z}n) \\ \vdots \\ f^{nl}\ (Kn,\ Ln,\ Sn,\ \mathbf{Z}_1,\cdots,\mathbf{Z}n) \end{pmatrix}
$$

ただし，Ki：地域 i の資本，Li：地域 i の労働，Si：地域 i の土地空間で上記はスカラー，さらに，**X**i：地域 i の 1 次産出財ベクトル，および**Z**i：地域 i の 1 次投入財ベクトルを表わしている。

上記(1)の同時方程式体系は，Ki，Li，Siをパラメータとして，同時に満足するような $(\mathbf{Z}_1^0\cdots,\mathbf{Z}n^0)$ に対して，生産関数群 $f^{ij}$ が連続であり，また連続な一階の導関数を有し，その Jacobian 行列が非特異ならば，これに対応する $(\mathbf{X}_1^0,\ \cdots,\ \mathbf{X}n^0)$ の近傍において一意的な逆関数

$$
\mathbf{Z}_1=\begin{pmatrix} \phi^{11}(\mathbf{X}_1,\cdots,\mathbf{X}n,K_1,\cdots,Kn,L_1,\cdots,Ln,S_1,\cdots,Sn) \\ \vdots \\ \phi^{11}(\mathbf{X}_1,\cdots,\mathbf{X}n,K_1,\cdots,Kn,L_1,\cdots,Ln,S_1,\cdots,Sn) \end{pmatrix}
$$
$$
\vdots \qquad\qquad \vdots \tag{2}
$$
$$
\mathbf{Z}n=\begin{pmatrix} \phi^{n1}(\mathbf{X}_1,\cdots,\mathbf{X}n,K_1,\cdots,Kn,L_1,\cdots,Ln,S_1,\cdots,Sn) \\ \vdots \\ \phi^{nl}(\mathbf{X}_1,\cdots,\mathbf{X}n,K_1,\cdots,Kn,L_1,\cdots,Ln,S_1,\cdots,Sn) \end{pmatrix}
$$

が存在する。するとこれら誘導された関数 $\phi^{ij}$ は，地域 i における財 j の投入関数を意味する。

同時方程式体系(1)の l・n 次 Jacobian 行列を **J** で表わす。すると，仮定により，

$$
|\mathbf{J}|=\begin{vmatrix} (\partial f^{11}/\partial\mathbf{Z}_1)' & \cdots & (\partial f^{11}/\partial\mathbf{Z}n)' \\ \vdots & & \vdots \\ (\partial f^{1l}/\partial\mathbf{Z}_1)' & \cdots & (\partial f^{1l}/\partial\mathbf{Z}n)' \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\partial f^{n1}/\partial\mathbf{Z}_1)' & \cdots & (\partial f^{n1}/\partial\mathbf{Z}n)' \\ \vdots & & \vdots \\ (\partial f^{nl}/\partial\mathbf{Z}n)' & \cdots & (\partial f^{nl}/\partial\mathbf{Z}n)' \end{vmatrix}
=\begin{vmatrix} (\partial\mathbf{X}_1/\partial\mathbf{Z}_1)' & \cdots & (\partial\mathbf{X}_1/\partial\mathbf{Z}n)' \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ (\partial\mathbf{X}n/\partial\mathbf{Z}_1)' & \cdots & (\partial\mathbf{X}n/\partial\mathbf{Z}n)' \end{vmatrix} \neq 0 \tag{3}
$$

である。ただし，$(\partial f^{ij}/\partial\mathbf{Z}i)$ は列ベクトルで定義し，l 次である。また，$(\partial\mathbf{X}i/\partial\mathbf{Z}i')$ は l 次正方行列であり，$(\partial\mathbf{X}i/\partial\mathbf{Z}i')=[(\partial f^{i1}/\partial\mathbf{Z}i')\ \cdots\ (\partial f^{il}/\partial\mathbf{Z}i')]$ なることに注意しよう。

分析上の便宜のため，生産関数群 $f^{ij}$ (i＝1，2，…，n；j＝1，2，…，l) を $\mathbf{Z}i'$ に関して 1 次同次であると仮定すれば，Euler の定理により，(1)は次のように書き表わされる。

$$
\begin{pmatrix}\mathbf{X}_1\\ \vdots \\ \mathbf{X}n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (\partial f^{11}/\partial\mathbf{Z}_1)' & \cdots & (\partial f^{11}/\partial\mathbf{Z}n)' \\ \vdots & & \vdots \\ (\partial f^{1l}/\partial\mathbf{Z}_1)' & \cdots & (\partial f^{1l}/\partial\mathbf{Z}n)' \\ \vdots & & \vdots \\ (\partial f^{n1}/\partial\mathbf{Z}_1)' & \cdots & (\partial f^{n1}/\partial\mathbf{Z}n)' \\ \vdots & & \vdots \\ (\partial f^{nl}/\partial\mathbf{Z}_1)' & \cdots & (\partial f^{nl}/\partial\mathbf{Z}n)' \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{Z}_1\\ \vdots \\ \mathbf{Z}n\end{pmatrix}
$$

$$
=\begin{pmatrix} (\partial\mathbf{X}_1/\partial\mathbf{Z}_1)' & \cdots & (\partial\mathbf{X}_1/\partial\mathbf{Z}n)' \\ \vdots & & \vdots \\ (\partial\mathbf{X}n/\partial\mathbf{Z}_1)' & \cdots & (\partial\mathbf{X}n/\partial\mathbf{Z}n)' \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{Z}_1\\ \cdots \\ \mathbf{Z}n\end{pmatrix}
$$
$$
=[\mathbf{J}]\begin{pmatrix}\mathbf{Z}_1\\ \vdots \\ \mathbf{Z}n\end{pmatrix} \tag{4}
$$

Jacobian 行列式は解の近傍で非ゼロであると仮定しているから，逆行列 $\mathbf{J}^{-1}$ が存在し，この逆行列を(4)の両辺の左側から掛ければ中間財投入量ベクトルについて解を得る。

$$
\begin{pmatrix}\mathbf{Z}_1\\ \vdots \\ \mathbf{Z}n\end{pmatrix}=[\mathbf{J}]^{-1}\begin{pmatrix}\mathbf{X}_1\\ \vdots \\ \mathbf{X}n\end{pmatrix} \tag{5}
$$

上式は生産関数が中間投入量に関して 1 次同次であるという仮定の下で導かれることを注意して置く。

いま，わが国の経済体系を首都圏ならびに他の非首都圏各地域に分割し，これら地域間の投入・産出の相互依存関係を考察する際に，各地域間の移出・移入関係のみならず，海外セクターに関する輸出入を考慮に入れると，各地域に対して，粗産出量 (**X**i；i＝1，2，…，n) に海外からの原材料輸入 ($\mu$i；i＝1，2，…，n) を加えた粗供給量から中間投入量 (**Z**i；i＝1，2，…，n) を控除した純供給量は均衡において，各地域間の最終需要量(**Y**i；i＝1，，2，…，n) に等しくなければならない。註2) すなわち，

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{X}_1+\mu_1-\mathbf{Z}_1-\mathbf{Y}_1=\mathbf{O}\\
&\qquad\vdots\\
&\mathbf{X}n+\mu n-\mathbf{Z}n-\mathbf{Y}n=\mathbf{O}
\end{aligned} \tag{6}
$$

が成立する。ただし，$\mu$i：地域 i の 1 次原材料輸入ベクトル，**Y**i：地域 i の 1 次最終需要ベクトルと定義する。最終需要量は国内最終需要と輸出需要を含むが，輸入最終製品需要を含まないことは留意すべきである。

原材料輸入を粗生産量の 1 次同次関数であると仮定すれば，各地域 i に対して，原材料輸入関数は次のように表わされる。

$$
\mu_1=\begin{pmatrix} m^{11}(\mathbf{X}_1) \\ \cdots \\ m^{11}(\mathbf{X}_1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(\partial m^{11}/\partial\mathbf{X}_1)'\mathbf{X}_1 \\ \vdots \\ (\partial m^{11}/\partial\mathbf{X}_1)'\mathbf{X}_1\end{pmatrix}=(\partial\mu_1/\partial\mathbf{X}_1)'\mathbf{X}_1
$$
$$
\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \tag{7}
$$
$$
\mu n=\begin{pmatrix} m^{n1}(\mathbf{X}n) \\ \cdots \\ m^{nl}(\mathbf{X}n)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(\partial m^{n1}/\partial\mathbf{X}n)'\mathbf{X}n \\ \vdots \\ (\partial m^{nl}/\partial\mathbf{X}n)'\mathbf{X}n\end{pmatrix}=(\partial\mu n/\partial\mathbf{X}n)'\mathbf{X}n
$$

上式は一括表記すれば，

$$
\begin{pmatrix}\mu_1\\ \vdots \\ \mu n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (\partial m^{11}/\partial\mathbf{X}_1)' & \cdots & O' \\ \vdots & & \vdots \\ (\partial m^{1l}/\partial\mathbf{X}_1)' & \cdots & O' \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ O' & \cdots & (\partial m^{n1}/\partial\mathbf{X}n)' \\ \vdots & & \vdots \\ O' & \cdots & (\partial m^{nl}/\partial\mathbf{X}n) \end{pmatrix}
$$

$$
=\begin{pmatrix} (\partial\mu_1/\partial \mathbf{X}_1)' & \cdots & \mathbf{O} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{O} & & (\partial\mu n/\mathbf{X}\partial n)' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{X}n \end{pmatrix}
$$

$$
=[\mathbf{M}]\begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{X}n \end{pmatrix} \tag{8}
$$

と書かれる。**M**は l・n 次正方行列である。

先の(6)式を移行し，(5)と(8)を代入すると，わが国経済の地域連関の均衡体系は次のように表現できる。

$$
\begin{pmatrix} \mathbf{Y}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{Y}n \end{pmatrix} = [\mathbf{I}+\mathbf{M}-\mathbf{J}^{-1}]\begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{X}n \end{pmatrix} \tag{9}
$$

ただし，**I** は l・n 次の単位行列である。いま逆行列$\mathbf{J}^{-1}$を**A**と書き替えれば，上式の係数行列は〔**I**＋**M**－**A**〕となるが，これは一般に Leontief 行列と呼ばれるものに形式上，類似するが，ここでは財別地域連関の場合に拡張した一般化となっている。行列**A**の要素は普通，投入係数と呼ばれ，行列**A**も一般の投入係数行列を拡張した形式になっている。

行列**A**（すなわち行列$\mathbf{J}^{-1}$）は次のように解釈できる。いま，行列**A**をn×n個のl次小行列に分割し，$A^{i'i}$と表わす。ただし，i′，i＝1，2，…，n であり，i′は行に即した位置の，i は列に即した位置の l 次小行列であることを指示する。よって，$A^{i'i}$ は，地域 i で生産を行なうのに地域 i′ からどのように中間財が投入されるかを示す，i′ と i との間の地域間産業連関表である。この小行列 $A^{i'i}$ の中の j′ 行列要素を $a^{i'i}_{j'j}$ と表わせば，これは，"地域 i において財 j を 1 単位生産するに要する地域 i′ の財 j′ の投入量"と定義できる。

他方，行列**M**は地域別に分割したとき，完全分解可能行列になっていて，地域別 l 次小行列が対角線上に並び，非対角小行列はゼロ行列になっている。これの解釈は次のようになる。対角線上，左上から i 番目の l 次小行列を $M^{ii}$ と表せば，これは地域 i における輸入原材料投入表になっている。この j′ 行 j 列の要素 $m^{ii}_{j'j}$ は "地域 i において財 j を 1 単位生産するのに要する海外セクターからの財 j′ の輸入投入量" と定義されよう。（ただし，i′ ≠ i に対して，$M^{i'i}=\mathbf{O}$ であり，$m^{i'i}_{j'j}=0$ となっていることに注意せよ。）

かくして，(9)式は，n 地域それぞれで l 個の財を生産するときの均衡体系を示すが，立地の異なる同種の財を異なる財として認定した場合のモデルになっている。

この拡大 Leontief 行列が非特異であって逆行列〔**I**＋**M**－**A**〕$^{-1}$が存在するならば，(9)式をベクトル**X**について解くことができる。すなわち，

$$
\begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{X}n \end{pmatrix} = [\mathbf{I}+\mathbf{M}-\mathbf{A}]^{-1}\begin{pmatrix} \mathbf{Z}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{Z}n \end{pmatrix} \tag{10}
$$

一般形式とはいえ，上式の意味は次のようである。わが国の経済体系において，最終需要が地域別・財別に与件として指定されるならば，その最終需要を充足すべき，中間財需要をも考慮に含めた各地域の各財の均衡粗生産量のベクトルは，その最終需要計画表の Leontief 逆行列による 1 次変換により求められる。

## Ⅲ　Cobb-Douglas 型生産関数の指定

前節では一般に，中間財 $\mathbf{Z}_1$，…，$\mathbf{Z}n$ のそれぞれに関して 1 次同次な生産関数 $f^{ij}$ を抽象的に論じたが，われわれのモデルを実証的な分析に用いる意図で具体的な生産関数を指定することが望ましい。そこで前節の抽象的な生産関数に課した仮定をすべて満足すると同時に，実際の数量分析に適用可能な生産関数として，Cobb-Douglas 型の生産関数を採用する。註3) このとき(1)式は具体的に，

$$
\mathbf{X}_1=\begin{pmatrix} F^{11}(K_1,L^1,S^1)Z_{11}^{\alpha^{11}_{11}}\cdots Z_{1l}^{\alpha^{11}_{l_1}}\cdots Z_{n_1}^{\alpha^{n_1}_{11}}\cdots Z_{nl}^{\alpha^{n_1}_{l_1}} \\ \vdots \\ F^{1l}(K_1,L_1,S_1)Z_{11}^{\alpha^{11}_{1l}}\cdots Z_{1l}^{\alpha^{11}_{ll}}\cdots Z_{n_1}^{\alpha^{n_1}_{1l}}\cdots Z_{nl}^{\alpha^{n_1}_{ll}} \end{pmatrix}
$$

$$
\vdots \qquad\qquad \vdots \tag{11}
$$

$$
\mathbf{X}n=\begin{pmatrix} F^{n1}(Kn,Ln,Sn)Z_{11}^{\alpha^{1n}_{11}}\cdots Z_{1l}^{\alpha^{1n}_{l_1}}\cdots Z_{n_1}^{\alpha^{nn}_{11}}\cdots Z_{nl}^{\alpha^{nn}_{l_1}} \\ \vdots \\ F^{nl}(Kn,Ln,Sn)Z_{11}^{\alpha^{1n}_{1l}}\cdots Z_{1l}^{\alpha^{1n}_{ll}}\cdots Z_{n_1}^{\alpha^{nn}_{1l}}\cdots Z_{nl}^{\alpha^{nn}_{ll}} \end{pmatrix}
$$

ただし，地域 i′ からの投入量ベクトル $\mathbf{Z}i'=(Z_{i'1}\cdots Z_{i'l})'$ の財 j の要素を$Zi'j$ と表わし，その指数を $\alpha^{i'i}_{j'j}$ と表わす。この指数は，地域 i において財 j を生産するのに要する中間財 j′ が地域 i′ から投入されることを意味し，任意の生産関数において，$\sum_{i',j'=1}^{n,\ l}\alpha^{i'i}_{j'j}=1$ かつ $\alpha^{i'i}_{j'j}\geqq 0$ と仮定する。よって，この生産関数は $Zij$ に関して 1 次同次である。また $F^{ij}$ (Ki, Li, Si) の項は中間財以外の生産要素に拘る部分であり，一般の形式をもっていて差支えない。註4)

Cobb-Douglas 型生産関数を用いるとき，先の Jacobian 行列式は(3)具体的に次によって書き直せる。地域 i における地域 i′からの投入で生産される（i，i′）小行列内の j′ 行 j 列の要素の一般的表現は，

$$\frac{\partial Xij}{\partial Zi'j'}=\alpha^{i'i}_{j'j}\frac{F^{ij}(Ki,Li,Si)\ Z_{11}^{\alpha^{1i}_{1j}}\cdots Z_{1l}^{\alpha^{1i}_{lj}}\cdots Zn_1^{\alpha^{ni}_{1j}}\cdots Znl^{\alpha^{ni}_{lj}}}{Zi'j'}$$

$$=\alpha^{i'i}_{j'j}\frac{Xij}{Zi'j'} \tag{12}$$

（i′, i＝1, 2, …, n；j, j′＝1, 2, …, l に対して）となる。これらは地域 i で財 j の生産における地域 i′ からの中間投入財 j′に関する限界生産力を表わす。よって一般に，（i, i′)小行列は次のように書ける。[註5)]

$$\left(\frac{\partial \mathbf{X}i}{\partial \mathbf{Z}i'}\right)'=\begin{pmatrix} \alpha^{i'i}_{1'1}Xi_1/Zi'_1 \cdots & \alpha^{i'i}_{1l}\ Xil/Zi'_1 \\ \vdots & \vdots \\ \alpha^{i'i}_{l_1}Xi_1/Zi'l \cdots & \alpha^{i'i}_{ll}\ Xil/Zi'l \end{pmatrix} \tag{13}$$

（i, i′＝1, 2, …, n）

上式の各要素について，生産関数の要素パラメータ $\alpha^{i'i}_{j'j}$ を所与として，Xij と Zi′j′ の当該期における観測値の比を設ければ，関連する Jacobian 行列の各要素を確定することができる。この見解は地域連関分析の実用的作業の上で重大なアイディアを示すことが後に判るはずである。

こうして，具体的な Jacobian 行列が確定すれば，Euler の定理によって書き直した１次同次の Cobb-Douglas 生産関数は(4)式の係数行列に上の (13) を代入して得ることができる。また，このように求められたJacobian 行列が非特異であるならば，逆行列が存在し，(5)式に対応する具体式を得ることができる。

同様の議論は原材料輸入関数が１次同次である場合に(7)式について成立つ。もしわれわれが地域 i の輸入原材料投入と産出財束の標本観測値を用いて，１次同次の原材料輸入関数を推定するならば，その推定係数の集合を当該期間に適用することにより，(8)式の係数行列**M**を確定することができる。すると，一般的な最終結果である(10)式のLeontief逆行列〔$\mathbf{I}+\mathbf{M}-\mathbf{A}$〕$^{-1}$ に対して推定された行列 $\mathbf{J}^*$ および $\mathbf{M}^*$ を代入することにより，われわれは，わが国の地域別・品目別粗生産量の望ましい配列を，最終需要 $\mathbf{Y}_1$, …, $\mathbf{Y}n$ の与件の下で求めることができる。

## Ⅳ 最終需要モデルの策定

経済理論の見地から(9)式の右辺は，地域別・産業別粗生産量の配列から中間生産物としての投入を控除し，輸入原材料投入を調整した最終部門への純供給量の配列を意味している。同様に左辺は，経済体系の地域別・産業別最終需要を示しているから，(9)式は前述したとおり，経済体系における地域別・産業別の需要・供給均衡条件になっている。

前掲(10)式はこれの解であって，各地域毎の産業部門別最終需要を外生的に与件として与えれば，その結果として，経済体系全体の粗生産量の配列が地域別・産業別に求められることを示している。したがって，われわれは(10)式における最終需要ベクトル（$\mathbf{Y}_1'$ … $\mathbf{Y}n'$）を何らかの形で，(10)式のモデル体系の外側から外生的に与えることが必要である。以下の議論は，この最終需要ベクトルを量的に与えるための最終需要部門のモデル構築を主眼とするものである。

具体的に，経済体系全般の最終需要部門モデルは地域別・産業別に部分分割されたマクロ経済モデルでなければならない。そして，注意すべきことは，この最終需要の概念が，あくまでもフローとしての中間生産物投入を排除するが，その他のあらゆる形態での需要量を考慮に入れていることである。

マクロ経済体系における経済主体の種類は，本質的に異なる行動基準によって分類されるべきである。われわれはこの分類基準に照らして，四つの経済主体に分類する。すなわち，個人部門，法人部門，政府部門および海外部門である。これらは擬制的にあたかも，統合化された主体が全く一つの巨大な行動主体として行動するかのように設定される。

i）個人部門

次のように表記を定める。$\mathbf{C}p$ ：当期に消費される財ベクトル，$\mathbf{P}$：対応する財の価格ベクトル，Yp：利用可能な個人所得および賦存資産，$\alpha p$ ：他のパラメータのベクトル。

個人消費者の行動標的は，彼の効用

$$u=u\ (\mathbf{C}p,\ \alpha p) \tag{14}$$

を予算制約

$$g\ (\mathbf{C}p,\ \mathbf{P},\ Yp)=0 \tag{15}$$

の下で最大にすることであり，彼の賦存資産と市場交換機会は自由に開かれている。この制約条件付最大化問題の一階の条件

$$\partial u/\partial \mathbf{C}p - \lambda p\partial g/\partial \mathbf{C}p=0 \tag{16}$$

$$-g\ (\mathbf{C}p,\ \mathbf{P},\ Yp)=0$$

は，最適な消費 $\mathbf{C}p^*$ と Lagrangean 乗数 $\lambda p^*$ について解くことができ，

$$\mathbf{C}p^*=\mathbf{C}p^*\ (\mathbf{P},\ Yp,\ \alpha p) \tag{17}$$

$$\lambda p^*=\lambda p^*\ (\mathbf{P},\ Yp,\ \alpha p)$$

を得る。ただし，制約条件付き二階の条件は $d\mathbf{C}p\fallingdotseq 0$ に対して，$(d\mathbf{C}p)'$ $(\partial g/\partial \mathbf{C}p)=0$ を満足する $(d\mathbf{C}p)'$ $(\partial^2 u/\partial \mathbf{C}p)^2$ $(d\mathbf{C}p)<0$ であり，導関数は $(\mathbf{C}p^*,\ \lambda p^*)$ で評価されている。

(17)式の結果は，個人主体の最適消費ベクトルが，関連する価格ベクトル，個人所得およびその他のパラメータ群の関数となることを示している。

消費需要関数がもし各地域毎に適当に分類された各財

毎に設定されるならば，各地域毎に財市場が分立することを前提に，

$$Cpij = Cpij\ (\mathbf{P}i,\ Ypi,\ \alpha pi) \qquad i=1,\ \cdots,\ n,\ j=1,\ \cdots,\ l \tag{18}$$

とすることができる。

ii）法人部門

次のように表記を定める。$\mathbf{K}c$：雇用される資本ストックのベクトル，$Lc$：雇用される労働力，$\overline{\mathbf{K}}c$：資本ストックの完全稼動時における容量のベクトル，$\mathbf{q}$：財の産出ベクトル，$\alpha c$：他の生産要素のベクトル。

生産関数の制約条件の下での生産費最小化問題を考える。すなわち，生産費

$$C=C\ (\mathbf{K}c,\ Lc,\ \overline{\mathbf{K}}c) \tag{19}$$

を生産関数

$$\mathbf{q}=\mathbf{q}\ (\mathbf{K}c,\ Lc,\ \alpha c) \tag{20}$$

の下で最小にする。$\overline{\mathbf{K}}c$ は規模のパラメータ，$\alpha c$ は技術パラメータとみなされる。また，もし$\overline{K}cj > Kcj$ならば，生産費には資本の購入費が含まれ，他方でもし$\overline{K}cj < Kcj$ならば，資本の遊休費が含まれる。一階の最小化条件：

$$\partial c/\partial \mathbf{K}c - \lambda' c \cdot \partial \mathbf{q}/\partial \mathbf{K}c = 0 \tag{21}$$

$$\partial c/\partial Lc - \lambda' c \partial \mathbf{q}/\partial Lc = 0 \tag{22}$$

$$\mathbf{q}-\mathbf{q}\ (\mathbf{K}c,\ Lc,\ \alpha c) = 0$$

は解かれて，

$$\mathbf{K}c^* = \mathbf{K}c\ (\mathbf{q},\ \overline{\mathbf{K}}c,\ \alpha c) \tag{23}$$

$$Lc^* = Lc\ (\mathbf{q},\ \overline{\mathbf{K}}c,\ \alpha c) \tag{24}$$

$$\lambda c^* = \lambda c\ \ (\mathbf{q},\ \overline{\mathbf{K}}c,\ \alpha c)$$

を得る。ただし$\lambda c$ はLagrangan乗数のベクトルであり，次数はベクトル$\mathbf{q}$と同じである。この制約条件付き最小化問題の二階の条件は，あらゆる

$$d\begin{bmatrix}\mathbf{K}c\\ Lc\end{bmatrix} \neq 0 \quad \text{に対して，}$$

$$d\,(\mathbf{K}'c\ Lc)\left(\partial g/\partial\begin{bmatrix}\mathbf{K}c\\ Lc\end{bmatrix}\right) = 0 \quad \text{を満足する}$$

$$d\,(\mathbf{K}'c\ Lc)\left(\partial^2 c'\partial\begin{bmatrix}\mathbf{K}c\\ Lc\end{bmatrix}^2\right) d\begin{bmatrix}\mathbf{K}c\\ Lc\end{bmatrix} > 0 \quad \text{である。ただ}$$

し，導関数は（$\mathbf{K}c^*$，$Lc^*$，$\lambda c^*$）で評価されている。

ここで，われわれは法人部門が拡張径路に限定されて生産を行なうと仮定する。このとき，法人部門の拡張径路は目的関数(19)に解(23)および(24)を代入して得られる。

$$c = c\ \ (\mathbf{q},\ \overline{\mathbf{K}}c,\ \alpha c) \tag{25}$$

これは，所与の規模と技術パラメータに対して産出を生産費に対応付けるものである。

次の段階は，法人部門の期待純損失を最小にする問題である。法人の予算方程式から，期待純損失関数を次のように得る：“生産費＋投資費用＋期待在庫保有費＋期待販売費＋期待金融費＋罰則費－収入－金融的流入”である。

所要の表記を次のように定める。$\bar{I}c$：期末在庫ストック，$\bar{I}c_{-1}$：前期末在庫ストック，$r$：金融利子率，$LOc$：借入資金増減，$Xc$：有価証券保有増減，$\beta c$：他のパラメータ。すると期待純損失関数は

$$F\ (\overline{\mathbf{K}}c,\ \bar{I}c) = c\ (\mathbf{q},\ \overline{\mathbf{K}}c,\ \alpha) + L^{ex}\ (\mathbf{q},\ \bar{I}c,\ \bar{I}c_{-1},\ \mathbf{P},\ r,\ LOc + Xc,\ \beta c) \tag{26}$$

と書かれるから，これを$\overline{\mathbf{K}}c$および$\bar{I}c$に関して最小にする一階の条件は

$$\partial c/\partial \overline{\mathbf{K}}c + \partial L^{ex}/\partial \overline{\mathbf{K}}c = \mathbf{0} \tag{27}$$

$$\partial L^{ex}/\partial \bar{I}c = \mathbf{0} \tag{28}$$

と得られる。よって，この体系は同時に解かれて，資本ストックと在庫ストックの最適水準をもたらす。

$$\overline{\mathbf{K}}c^* = \overline{\mathbf{K}}\ (\mathbf{q},\ \bar{I}c_{-1},\ \mathbf{P},\ r,\ LOc+Xc,\ \alpha c,\ \beta c) \tag{29}$$

$$\bar{I}c^* = \bar{I}\ (\mathbf{q},\ \bar{I}c_{-1},\ \mathbf{P},\ r,\ LOc+Xc,\ \alpha c,\ \beta c) \tag{30}$$

上記の結果は，法人部門の最適資本ストックと在庫ストックが，ともに，産出量ベクトル，前期末在庫ストック，生産財の価格ベクトル，金融利子率，金融資産増減，技術パラメータその他の関数となることが示される。注意すべきは，この段階で(29)，(30)式は最適ストックを指示しており，実現したストックを意味していないことである。

もし，上の二式が各地域毎の法人部門に対して適用されるならば，適当に分類した財 j の生産に特化するとき，財ベクトル$\mathbf{q}$はスカラー q に退化し，これに応じて価格ベクトル$\mathbf{P}$はスカラー P に退化する。よって，

$$\overline{\mathbf{K}}c^*ij = \overline{\mathbf{K}}ij\ \ (qij,\ \bar{I}cij_{-1},\ Pij,\ r,\ LOcij+Xcij,\ \alpha cij,\ \beta cij) \tag{31}$$

$$\bar{I}c^*ij = \bar{I}ij\ (qij,\ \bar{I}cij_{-1},\ Pij,\ r,\ LOcij+Xcij,\ \alpha cij,\ \beta cij) \tag{32}$$

ただし$\overline{\mathbf{K}}cij$は地域 i 産業 j の資本ストックのベクトルであり，関与する資本財の要素だけが正である。[註6)]

iii）政府部門

政府は，国家的効用を政府の予算制約の下で最大にすると考える。国家的効用を，政府の政策用具：すなわち，政府消費，政府（公共）資本ストック，および政府（公共）在庫ストックの関数として定義しよう。

表記を以下のように定める。$\mathbf{C}g$：政府消費財ベクトル $\overline{\mathbf{K}}g$：政府資本ストックのベクトル，$\bar{\mathbf{I}}g$：政府在庫ストックのベクトル，$\gamma g$：その他のパラメータ。

すると，政府の国家的効用関数は

$$u = u\ \ (\mathbf{C}g,\ \overline{\mathbf{K}}g,\ \bar{\mathbf{I}}g,\ \gamma g) \tag{32}$$

と書かれる。他方で，政府の予算制約は，一般政府と政府企業を包括して定式化される。政府企業は利潤を最大にするのではなく，ある一定の先決された利潤（時に非正の）水準を志向し，他方で一般政府は歳入と歳出の会計的バランスを保つから，政府の予算制約は

$$g\ (\mathbf{C}g,\ \overline{\mathbf{K}}g,\ \bar{\mathbf{I}}g,\ \bar{\mathbf{I}}g_{-1},\ Yg,\ GCR,\ rg,\ Xg,\ \gamma g)=0 \tag{33}$$

追加的に，Ygは政府所得，GCR は政府経常収入，rgは政府証券利子率，および Xg は国債発行増減である。

政府の予算制約(33)の下で国家的効用(32)を最大化する問題の一階の条件は，

$$\partial u/\partial \mathbf{C}g-\lambda g\partial g/\partial \mathbf{C}g=\mathbf{0} \tag{34}$$

$$\partial u/\partial \overline{\mathbf{K}}g-\lambda g\,\partial g/\partial \overline{\mathbf{K}}g=\mathbf{0} \tag{35}$$

$$\partial u/\partial \bar{\mathbf{I}}g-\lambda g\partial g/\partial \bar{\mathbf{I}}g=\mathbf{0} \tag{36}$$

$$-g\ (\mathbf{C}g,\ \overline{\mathbf{K}}g,\ \bar{\mathbf{I}}g,\ \bar{\mathbf{I}}g_{-1},\ Yg,\ GCR,\ rg,\ Xg,\gamma g)=0 \tag{37}$$

であり，これらは同時に解かれて，次の最適需要計画表を得る。

$$\mathbf{C}g^{*}=\mathbf{C}g\ (\bar{\mathbf{I}}g_{-1},\ Yg,\ GCR,\ rg,\ Xg,\ \gamma g) \tag{38}$$

$$\overline{\mathbf{K}}g^{*}=\overline{\mathbf{K}}g\ (\bar{\mathbf{I}}g_{-1},\ Yg,\ GCR,\ rg,\ Xg,\ \gamma g) \tag{39}$$

$$\bar{\mathbf{I}}g^{*}=\bar{\mathbf{I}}g\ (\bar{\mathbf{I}}g_{-1},\ Yg,\ GCR,\ rg,\ Xg,\ \gamma g) \tag{40}$$

$$\lambda g^{*}=\lambda g\ (\bar{\mathbf{I}}g_{-1},\ Yg,\ GCR.\ rg,\ Xg,\ \gamma g)$$

これにより，政府の消費，政府の資本，政府の在庫それぞれの需要計画を導出できたわけだが，政府が所定の各地域における各財の分類に従って調達行動を採ると想定されるならば，このとき，政府の財調達は各地域にそれぞれくまなく張りめぐらされた政府出張機関が各地域毎に行なうと考えることになる。（この考え方はそれ程，不自然ではない。もし地域が各都道府県に分類されるならば，政府の分割された出張機関は，各都道府県庁ということになり，もちろん，国の政府活動も然るべき地域毎の庁と合体される。一般政府の概念は，国の政府および地方自治体を含めるから，この取扱いは可能である。）よって，

$$\mathbf{C}gi^{*}=\mathbf{C}g\ (\bar{\mathbf{I}}gi_{-1},\ Yg,\ GCR,\ rg,\ Xg,\ \gamma g) \tag{41}$$

$$\overline{\mathbf{K}}gi^{*}=\overline{\mathbf{K}}g\ (\bar{\mathbf{I}}gi_{-1},\ Yg,\ GCR,\ rg,\ Xg,\ \gamma g) \tag{42}$$

$$\bar{\mathbf{I}}gi^{*}=\bar{\mathbf{I}}g\ (\bar{\mathbf{I}}gi_{-1},\ Yg,\ GCR,\ rg,\ Xg,\ \gamma g) \tag{43}$$

ここで，資本ないし在庫ストックが地域ｉに関連するとき，非ゼロの要素をとる。註7)

iv）海外部門

海外部門は，わが国以外の経済圏を一括する。われわれのモデルの所要範囲としては，海外部門の細分化は不必要である。理論的見地から重要なのは，海外部門によるわが国からの輸出に対する需要の定式化を行なうのに際して発生する問題点，主として集計化に関する困難である。これは輸出需要関数を設定した後に処理するように導びこう。

まず，海外の各経済圏・各部門を一括する輸出需要関数は，これまでに展開して諸部門の需要関数定式化の結果をむしろ包括する形で便宜的に解釈できる。基本的に輸出需要関数は海外の需要主体について，(18)，(31)，(32)，(41)，(42)，および(43)を合成すると，次のような変数群の関数となるだろう。すなわち，内外価格のベクトル**P**および**Pf**；海外各主体の所得項 Ypf，Ygf，他人および自己資本増減 LOcf+Xcf+Xgf 歳入 GCRf およびその他のパラメータ群を配列したものが変数とる。ただし下付きのｆは外国を表わす。これを整理すると，主たる変数群は，内外価格項（比で表わすとき交易条件といわれる），所得項，資産項となるが，ここで問題は，海外の国民所得統計等を合計する単純な手段でも，上記の集計量を統計数値的に捕捉することが不可能なことである。これに対処する一つの措置は，統計的に捕捉不能な変数を捕捉可能な変数により代理させることである。この代理変数を用いる手段は，これら変数間に極めて密接な関係があると想定できるときに可能である。例えば，海外の国民所得合計は普通では統計的に採取できない。何故なら，自由諸国でも低開発国の国民所得統計が完備していないこと，また共産圏での統計が利用可能でないからである。すると提案される輸出需要関数は次のようになるだろう。ただし，Ei：地域ｉからの輸出ベクトル，**Pi**：地域ｉの価格ベクトル，**Pf**：海外の価格ベクトル，Yf：海外所得ないし代理変数，Ｒ：その他の関連パラメータとする。

$$Ei=E\ (\mathbf{Pi},\ \mathbf{P}f,\ Yf,\ R) \tag{44}$$

輸入関数は，上掲のあらゆる需要項目が輸入需要も含んでいるために，これを差し引くために用意される。輸入行動方程式は，国内の需要主体全般に拘わるので，一般に国民所得ないし国民総生産によって説明する慣行もあるが，基本的には上述の輸出需要関数の設定において考察した如き内容を，国内の経済主体に置き直して考えればよい。また重要なことは，原材料輸入は Leontief行列内の輸入係数行列を考察する際に，(7)式のように体系内にすでに編入してあるので，最終需要部門における輸入需要関数は，それ以外の最終消費財および資本財の輸入に限定されるべきである。註8)

## Ｖ　モデルの適用と単純化

### 地域連関モデル

Ⅱ，Ⅲ節で示したモデルは地域別・産業別の最も一般的な体系を示しているが，実際の分析上の要請により，各様に単純化することができる。もし，各地域ｉ毎の財ベクトルの要素を集計してスカラーとする単純化は，地域を通じて産業区分が消去されるから，地域連関モデルに導く。他方，各地域ｉにわたり横断的に各財毎に集計すると，これに伴うモデルは，各産業を通じて地域が消去されるから，産業連関モデルをもたらす。この二つを極端なケースとして，この間に，それぞれ地域と産業の分類の細分化から二分化にいたる中間規模が多く存在する。また，さらに地域連関モデルで一般にｎ個の地域分類を，たとえば首都圏および非首都圏のように，二分類とするまで，単純化の段階がある。これは産業連関モデ

ルについても同様である。このような単純化は分析上必要な統計量の利用可能性により要請されたり，分析目的のビジョンにより下部分類の程度が決められる。

今，モデル分析の目的が，首都圏と非首都圏の地域二分だけを要請するという，最も単純なケースを例として，適用の修正を見るとしよう。産業分類は捨象するものとする。

首都圏を添字１で表わし，非首都圏を添字２で表わす。すると，それぞれの生産関数は(1)式を単純にした形で，

$$X_1=f^1\ (K_1,\ L_1,\ S_1,\ Z_1) \tag{45}$$

$$X_2=f^2\ (K_2,\ L_2,\ S_2,\ Z_2) \tag{46}$$

のように書かれる。陰関数の定理により，上掲の同時方程式体系を解いて，

$$Z_1=\phi^1\ (X_1,\ X_2,\ K_1,\ K_2,\ L_1,\ L_2,\ S_1,\ S_2) \tag{47}$$

$$Z_2=\phi^2\ (X_1,\ X_2,\ K_1,\ K_2,\ L_1,\ L_2,\ S_1,\ S_2) \tag{48}$$

を得る。$Z_1$，$Z_2$はそれぞれ首都圏，非首都圏の投入量を表わし，上の２式は投入関数である。解の存在条件は f の連続な一階の導関数があり，その Jacobian が非特異なることである。この Jacobian 行列式は(3)に対応して

$$|\mathbf{J}|=\begin{vmatrix} \partial f^1/\partial Z_1 & \partial f^1/\partial Z_2 \\ \partial f^2/\partial Z_1 & \partial f^2/\partial Z_2 \end{vmatrix}=f_1^1 f_2^2-f_2^1 f_1^2 \neq 0 \tag{49}$$

である。ただし $f_j^i=\partial f^i/\partial Z_j$ (i, j＝１，２）のように略記する。生産関数 $f^i$（i＝１，２）が１次同次であるならば，Euler の定理により(45)，(46)式は

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f_1^1 & f_2^1 \\ f_1^2 & f_2^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix}=[\mathbf{J}]\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} \tag{50}$$

と書け，これは(4)式に対応する。 Jacobian 行列式は解（$Z_1^*$，$Z_2^*$）の近傍で非ゼロと仮定するから， Jacobian 行列 $\mathbf{J}$ は逆行列 $\mathbf{J}^{-1}$ をもち，これにより(50)式の解を次のように得る。これは(5)式に相当する。

$$\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f_1^1 & f_2^1 \\ f_1^2 & f_2^2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}=[\mathbf{J}]^{-1}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \tag{51}$$

さらに，(6)式の定義式はこの場合，

$$X_1+\mu_1-Z_1-Y_1=0 \tag{52}$$

$$X_2+\mu_2-Z_2-Y_2=0 \tag{53}$$

と簡単になり，首都圏・非首都圏の原材料輸入$\mu_1$，$\mu_2$および最終需要 $Y_1$，$Y_2$ はスカラーである。この原材料輸入関数を粗生産量Xの１次同次であると仮定すると(8)式に対応して，

$$\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \partial m^1/\partial X_1 & 0 \\ 0 & \partial m^2/\partial X_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} m_1^2 & 0 \\ 0 & m_2^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \tag{54}$$

を得る。(52)，(53)式に，(51)，(54)式を代入して整理すると(9)式に対応して，

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}=[\mathbf{I}+\mathbf{M}-\mathbf{J}^{-1}]\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}=[\mathbf{I}+\mathbf{M}-\mathbf{A}]\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1+m_1^1-a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & 1+m_2^2-a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \tag{55}$$

を得る。ただし，$\mathbf{J}^{-1}=\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ とする。

よって，最終的結果である(10)式の簡略形は，

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}=[\mathbf{I}+\mathbf{M}-\mathbf{A}]^{-1}\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1+m_1^1-a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & 1+m_2^2-a_{22} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} 1+m_2^2-a_{22} & a_{12} \\ a_{21} & 1+m_1^2-a_{11} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} \tag{56}$$

を得る。ただし$\Delta$はLeontief 行列式であり，

$\Delta=(1+m_1^1-a_{11})(1+m_2^2-a_{22})-a_{12}\,a_{21}\neq 0$とする。

ここでⅢ節で導入した Cobb-Douglas 型の生産関数を用いると結果はますます具体性を帯びる。生産関数(45)，(46)を具体的に指定し，

$$X_1=F^1\ (K_1,\ L_1,\ S_1)\ Z_1^{\alpha}\ Z_2^{1-\alpha} \tag{57}$$

$$X_2=F^2\ (K_2,\ L_2,\ S_2)\ Z_1^{\beta}\ Z_2^{1-\beta} \tag{58}$$

と置くと，これらは $Z_1$，$Z_2$ に関して１次同次である。ただし，$0<\alpha$，$\beta<1$と限定する。所要の導関数は以下のように求められる。

$$f_1^1=\partial X_1/\partial Z_1=\alpha F^1(K_1,L_1,S_1)(Z_1/Z_2)^{\alpha-1}=\alpha X_1/Z_1 \tag{59}$$

$$f_2^1=\partial X_1/\partial Z_2=(1-\alpha)F^1(K_1,L_1,S_1)(Z_1/Z_2)^{\alpha}=(1-\alpha)X_1/Z_2 \tag{60}$$

$$f_1^2=\partial X_2/\partial Z_1=\beta F^2(K_2,L_2,S_2)(Z_1/Z_2)^{\beta-1}=\beta X_2/Z_1 \tag{61}$$

$$f_2^2=\partial X_2/\partial Z_2=(1-\beta)F^2(K_2,L_2,S_2)(Z_1/Z_2)^{\beta}=(1-\beta)X_2/Z_2 \tag{62}$$

これは(12)に対応する。すると Jacobian 行列式(49)は具体的に

$$|\mathbf{J}|=\begin{vmatrix} f_1^1 & f_2^1 \\ f_1^2 & f_2^2 \end{vmatrix}=(\alpha-\beta)F^1(K_1,L_1,S_1)F^2(K_2,L_2,S_2)\times(Z_1/Z_2)^{\alpha+\beta-1}=(\alpha-\beta)\frac{X_1\ X_2}{Z_1\ Z_2} \tag{63}$$

と書き直され，$\alpha\neq\beta$ ならば$|\mathbf{J}|\neq 0$なることが判かる。

最終的結果(56)式は，生産関数が上記の Cobb-Douglas 型であるとき，次のような具体的な形式になる。註9)

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} 1+m_2^2-a_{22} & a_{12} \\ a_{21} & 1+m_1^1-a_{11} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix}1+m_2{}^2-\frac{1}{|\mathbf{J}|}\alpha F^1(Z_1/Z_2)^{\alpha-1} & -\frac{1}{|\mathbf{J}|}(1-\alpha)F^1(Z_1/Z_2)^{\alpha} \\ -\frac{1}{|\mathbf{J}|}\beta F^2(Z_1/Z_2)^{\beta-1} & 1+m_1{}^1-\frac{1}{|\mathbf{J}|}(1-\beta)F^2(Z_1/Z_2)^{\beta}\end{pmatrix}$$

$$\times\begin{pmatrix}\mathbf{y}_1\\ \mathbf{y}_2\end{pmatrix}=\frac{1}{\Delta}\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}m_2{}^2&0\\0&m_1{}^1\end{pmatrix}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{|\mathbf{J}|}\begin{pmatrix}\alpha X_1/Z_1 & -(1-\alpha)X_1/Z_2\\ -\beta X_2/Z_1 & (1-\beta)X_2/Z_2\end{pmatrix}\right) \tag{64}$$

ただし，

$$\Delta=(1+m_1{}^1)(1+m_2{}^2)-\frac{1}{|\mathbf{J}|}(1+m_1{}^1)\alpha F^1(Z_1/Z_2)^{\alpha-1}$$

$$-\frac{1}{|\mathbf{J}|}(1+m_2{}^2)(1-\beta)F^2(Z_1/Z_2)^{\beta}+\frac{1}{|\mathbf{J}|^2}(\alpha-\beta)F^1F^2$$

$$(Z_1/Z_2)^{\alpha+\beta-1}=(1+m_1{}^1)(1+m_2{}^2)-\frac{1}{|\mathbf{J}|}(1+m_1{}^1)\alpha\frac{X_1}{Z_1}$$

$$-\frac{1}{|\mathbf{J}|}(1+m_2{}^2)(1-\beta)\frac{X_2}{Z_2}+\frac{1}{|\mathbf{J}|} \tag{65}$$

である。

具体的な推定手続きを付言して置く。まず，(57)と(58)の二つの具体的形式を指定し，パラメータ$\hat{\alpha}$と$\hat{\beta}$を推定する。さらに，(64)式を推定し，$\hat{m}_1{}^1$と$\hat{m}_2{}^2$を求める。生産関数の$F^1$，$F^2$項は，実績値$X_1$, $X_2$と$Z_1$, $Z_2$の四通りの比を用いれば不要になる。これらを時系列的に用意する。また，$(Z_1/Z_2)$を時系列に用意する。これらにより，(64)式の行列および$\hat{\Delta}$を時系列的に得るから，このように時間の経過とともに動く動学的プロセスを分析することができる。注意すべきことは次の点である。われわれが，ここで展開した首都圏および非首都圏の地域連関モデルは，生産関数群を推定する適切な統計データさえ利用可能であるならば，投入・産出表**A**が付随的に確定でき，しかもそれらが時系列的に得られるということ，さらに，地域の原材料輸入関数が推定できれば，Leontief 行列を推定することができるということである。この意味は極めて重要であり，最初に首都圏・非首都圏の地域連関自体を統計的に作成する作業を不要とする。つまり，生産関数および輸入関数群の推定により，われわれは地域連関の投入・産出表と Leontief 行列を推定できるのである。

**最終需要部門モデル**

前項で考察した首都圏・非首都圏の分類による単純モデルの例示に呼応して，最終需要部門モデルの単純化に及ぼす効果に触れて置く。

一般に(10)式の最も細分化された連関モデルに対応する最終需要部門モデルは，各地域毎の財別に，あらゆる需要主体の需要計画表を集計した形式で現われるが，首都圏・非首都圏の二分類に即応するとき，最終需要のモデルは，財の分類を捨象し，二地域間で需要主体の最終需要計画表を集約した形式で設定される。すなわち，前掲(18)，(31)，(32)，(41)，(42)，および(43)，(44)等の行動方程式は，首都圏地域経済に対する需要と非首都圏地域経済に対するそれと全く二分される形式で設ければよい。つまり，各行動方程式について，ｉ＝１，２かつｊについては統合化すれば良い。

註1)　Tadashi Kiritani & Hiroya Akiba, “Quarterly Macro-Econometric Equations of Japan――GNP Sub-System, 1954 through 1972――, 『経済と経済学』，37号，1975年11月，東京都立大学経済学部，所収。当研究は都市研究センターの助成により推定方程式の電子計算が行なわれた。

註2)　普通，実用的に紹介されるモデルは社会の会計的定義式として名目表示で行なわれるが，本論文ではすべて実物表示で議論が展開される。これは理論的見地からむしろ標準的である。

註3)　Cobb-Douglas の生産関数は，投入要素として資本Ｋ，労働Ｌを投入して産出Ｙを生産する技術的変形関係として普通

$Y=AK^{\alpha}L^{\beta}$のように定義され，$\alpha$，$\beta>0$，$\alpha+\beta=1$のとき収穫一定を仮定する。ここでのCobb-Douglas型生産関数は原材料投入Zi'iに関して１次同次性を仮定し，資本Kiと労働Liについては特に規定していない。

註4)　変数とパラメータ，関数の添字について一見，複雑なように見受けられるが，この種の取扱いには，財の発生地域と終着地域，財の発生産業と終着産業の必ず四つの属性をもつ。ｉを地域，ｊを財ないし産業（産業は特定の財の生産に特化している）と考え，ダッシュは発生，ダッシュ無きは終着と解釈すれば理解が容易になろう。

註5)　Jacobian 行列の各要素の数値は，解（Zi'1，…，Zi'l)*および，これに対応する（$Xi_1$，…，Xil)*において評価される。よって，一般の要素$\alpha^{i'i}_{j'j}$Xij/Zi'iは解における評価（すなわち実用主義的には観測値のＸとＺ）を用いればよい。

註6)　(31)，(32)式は資本と在庫の最適ストック量を規定する。これはそのままでは最終需要部門に編入されない。これは例えば，恒等式　$\mathbf{K}cij=\overline{\mathbf{K}}{}^*cij-\overline{\mathbf{K}}cij_{-1}$および，$\mathbf{I}cij=\bar{\mathbf{I}}{}^*cij-\bar{\mathbf{I}}cij_{-1}$　を用い当期のストック増減（フロー）に直して編入される。

註7)　同上註6）の内容は$\overline{\mathbf{K}}{}^*gij$と$\bar{\mathbf{I}}{}^*gij$にも当てはまる。

註8)　最終需要部門のモデル体系は本文で提示した行動方程式群だけで構成されるのではなく，たとえば各種の所得項，価格体系等を内生化するかどうかは分析のビジョンに拘わる処理の問題である。また，最終需要部門モデルの根底には，Yij＝Cpij＋Kcij＋Icij＋Cgij＋Kgij

$+Igij+Eij-Mij$ のような地域 i 財 j （i＝1，2，…，n かつ j＝1，2，…，l）に対する需要・供給の均衡条件があり，このような均衡条件は不可欠である。

註9） 参考として，

$$\mathbf{J}^{-1}=\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{|\mathbf{J}|}\begin{pmatrix} (1-\beta)F^2(Z_1/Z_2)^{\beta} & -(1-\alpha)F^1(Z_1/Z_2)^{\alpha} \\ -\beta F^2(Z_1/Z_2)^{\beta-1} & \alpha F^1(Z_1/Z_2)^{\alpha-1} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} (1-\beta)X_2/Z_2 & -(1-\alpha)X_1/Z_2 \\ -\beta X_2/Z_1 & \alpha X_1/Z_1 \end{pmatrix}$$

## 参考文献

[1] Gale D., *The Theory of Linear Economic Models*, McGraw-Hill, 1960.

[2] Goldberger, A. S., *Econometric Theory,*, John Wiley, 1964.

[3] Johnston, *Econometric Methods,* McGraw-Hill, 1963.

[4] Kiritani, T., & J. Maru, "A Quarterly Econometric Models of Japan, April 1955 through March 1969", presented at the 2nd World Congress of the Econometric Society held at the University of Cambridge, England, in September, 1970.

[5] Kiritani, T., & H. AKiba, "Quarterly Macro-Econometric Equations of Japan-GNP Sub-System, 1954 through 1972—", Keizai to Keizaigaku, Faculty of Economics, Tokyo Metropolitan University, 1975.

[6] Koopmans, T. C., ed., *Activity Analysis of Production and Allocation*, Wiley, 1951.

[7] Leonticf, W. W., *The Structure of the American Economy*, 1919—1929, Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1941.

[8] Samuelson, P. A., "Abstract of a Theorem Concerning Substitutability in Open Leontief Models", in Koopmans [6].

[9] Solow, R., "On the Structure of Linear Models", *Econometrica*, vol. 20, 1952.

[10] Solow, R., "Competitive Valuation in a Dynamic Input-Output System", *Econometrica*, vol 27 1959.

**付記** 編集委員会

本論文中方程式に用いられた記号の一部に，印刷の技術的理由により学界の基準的な方式通りに表示できなかった点があることを，筆者と読者におわびし御諒解をお願いいたします。